C. C. SCHROEDER

Einführung in die AUSSAGENLOGIK

Zur Beachtung: Das Folgende ist keine streng systematische Darstellung, sondern nur eine in nichtformaler Sprache gehaltene Einführung in jene Fundamente des sog. Aussagenkalküls, die zum Verständnis der deduktiven Methoden von Bedeutung sind.

Was sind Aussagen ?

Unter einer Aussage versteht man die gedankliche oder geistige Repräsentation eines Sachverhalts.
Ein Sachverhalt besteht, wenn irgendwelchen Elementen, Individuen oder Gegenständen bestimmte Merkmale (Eigenschaften, Beziehungen) zukommen bzw. nicht zukommen. Im allgemeinen wird eine Aussage in einem Aussagesatz sprachlich ausgedrückt. Streng genommen, muss man deshalb zwischen Aussagen und Aussagesätzen unterscheiden, denn z.B. sind

„*zwei ist kleiner als vier*“
und „*2 < 4*“

zwei verschiedene Aussagesätze (der eine in natürlicher, der andere in mathematischer Sprache formuliert), aber die Aussage ist in beiden Fällen die gleiche.
Wenn wir jedoch die Bezeichnung ,,sprachliche Äußerung" auch auf formale Symbolsprachen ausdehnen, so können wir eine Aussage als eine sprachliche Äußerung auffassen, die

1. syntaktisch korrekt (gemäß den Regeln der jeweiligen Sprache) gebildet,
2. sinnvoll sein und
3. prinzipiell danach entscheidbar sein muss, ob sie wahr oder falsch ist.

Eine Aussage hat also zunächst den Charakter einer Behauptung. Eine Aussage ist wahr, wenn der von ihr behauptete (oder dargestellte) Sachverhalt real besteht (existiert); sie ist falsch, wenn dies nicht der Fall ist.
Die Bedeutung einer Aussage besteht darin, dass sie wahr oder falsch ist. Man nennt die Bestimmungen „wahr" und „falsch“ die Wahrheitswerte einer Aussage.
In der formalen Aussagenlogik existieren nur diese beiden Wahrheitswerte. Dieser Umstand wird durch das sog. Axiom der Zweiwertigkeit festgelegt. Dieses Axiom beinhaltet zweierlei, nämlich

1. dass jede Aussage entweder wahr oder falsch ist und nichts Drittes sein kann (principium exclusii tertii: Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten);
2. dass keine Aussage existiert, die wahr und zugleich auch falsch wäre (principium contradictionis: Prinzip vom ausgeschlossenen Widerspruch).

Durch das Zweiwertigkeits-Axiom wird also die (unendliche) Menge aller möglichen Aussagen vollständig in zwei elementefremde Klassen aufgeteilt: die Klasse aller wahren Aussagen (W: „das Wahre“) und die Klasse aller falschen (F: „das Falsche“).

Dem Zweiwertigkeits-Axiom wohnt durchaus keine zwingende logische Notwendigkeit inne. Man kann aus rein zweckmäßigen Gründen dafür optieren - oder auch nicht. In der Quantentheorie z.B. hat es sich als zweckmäßiger herausgestellt, noch einen dritten „Wahrheitswert“ einzuführen: nämlich die Bedeutung ,,(prinzipiell) unentscheidbar". Das heißt: Man kann in der Quantentheorie Aussagen formulieren, die zu einem definierten Zeitpunkt mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit wahr und z u g 1 e i c h mit der komplementären Wahrscheinlichkeit falsch sind, Aussagen also, für die eine Entscheidung, o b sie wahr oder falsch sind, g r u n d s ä t z 1 ich nicht möglich ist.
Allerdings behauptet die Aussagenlogik keineswegs, dass für jede Aussage p r a k t i s c h entscheidbar sein müsse, ob sie wahr oder falsch sei. In vielen Fällen ist die empirische Überprüfung, ob eine Aussage etwas beschreibt, was tatsächlich objektiv der Fall ist (oder nicht), aus rein technischen Gründen (noch) nicht möglich. Auch in der Mathematik gibt es zahlreiche Aussagen, für die es bisher nicht gelungen ist, sie zu beweisen oder zu widerlegen. Die zweiwertige Aussagenlogik unterstellt lediglich, dass

jede Aussage (besonders jede mathematische) in einem a b s o1 u t e n (oder idealen) Sinne wahr oder falsch sein muss, nicht aber, dass wir das in jedem Falle auch schon wissen oder ein Verfahren kennen, um es zu entscheiden.
Deswegen ist es äußerst wichtig, Aussagen von Urteilen zu unterscheiden. Ein Urteil ist ein psychologischer Tatbestand im Bewusstsein eines Menschen, während im Begriff der ,,Aussage" gerade von jedem Bezug auf ein individuelles Bewusstsein abstrahiert wird. Menschliche Subjekte können u r t e i l e n , die Aussage A sei wahr; aber daraus folgt keineswegs, dass sie tatsächlich auch wahr i s t: denn das Urteil kann i r r i g sein (und das Subjekt überdies ohne jedes Wissen darüber, dass es sich täuscht). Die Wahrheit (oder Falschheit) einer Aussage wird von der Aussagenlogik als absolut gesetzt und darf nicht mit der (relativen und subjektiven) G e w i ß h e i t eines urteilenden Menschen verwechselt werden, dem der Zugang zu endgültiger objektiver Wahrheit möglicherweise überhaupt versagt ist.

Obwohl, wie noch gezeigt wird, auch mathematische Gleichungen den Charakter von Aussagen haben, sind Aussagen durchaus nichts notwendig Mathematisches, sondern ganz allgemein sprachliche Äußerungen in der Form von Sätzen (natürlichen oder formal-symbolischen), durch die in allen Wissenschaften versucht wird, die sog. objektive Realität durch (sprachliche) Zeichen wiederzugeben.
Allerdings muß man, besonders bei natürlichsprachlichen Aussagen, streng unterscheiden:

a. Sprachliche Ausdrücke, die keine Aussagen sind, z.B.
   ,,Komm her!", ,,Guten Morgen" oder *,,Wie spät ist es?"*
b. Ausdrücke, die zwar Sprachzeichen verwenden, jedoch in einer syntaktisch oder grammatikalisch unzulässigen (d.h. nicht regelgerechten) Weise, z.B.
   ,,Freitags ist es kälter als draußen", *,,Der Regen oder haben schön*"
c. Aussagen, die grammatikalisch korrekt gebildet sind, aber (semantisch) sinnlos sind, z.B.
   ,,Rechtwinklige Dreiecke verabscheuen blaue Orangen"
d. Aussagen, die zwar einen Sinn, aber keine Bedeutung, nämlich keinen Wahrheitswert haben, z.B.
   ,,Der kleinste echte Bruch ist größer als Null"

Man beachte den Unterschied zwischen Sinn und Bedeutung! Man nennt den Sinn auch den intensionalen Aspekt einer Aussage, die Bedeutung ihren extensionalen Aspekt. Ihre Bedeutung ist ihr Wahrheitswert. Ob ihr ein solcher überhaupt zukommen kann, hängt davon ab, ob das Subjekt oder das über dieses ausgesagte Prädikat (s.u.) eine Bedeutung hat. Wenn das Subjekt, über das etwas ausgesagt wird, gar nicht existiert (wie z.B. ein Pegasus oder der kleinste echte Bruch); wenn mithin dem verwendeten Zeichen keine Bedeutung (kein Bezeichnetes) korrespondiert, so kann auch die Aussage insgesamt keine Bedeutung (keinen Wahrheitswert) haben. - Auch für einzelne Begriffe (Wörter) ist die Unterscheidung von Sinn und Bedeutung wesentlich: z.B. ist in der Aussage

,,Der Abendstern ist der Morgenstern"

die Bedeutung der beiden Substantive dieselbe (denn sie bezeichnen beide dasselbe Himmelsobjekt, nämlich die Venus); ihr Sinn aber ist verschieden (denn es könnte jemand ja nicht wissen, dass beide Ausdrücke denselben Stern bezeichnen).

e) Aussagen, die Sinn und Bedeutung haben, jedoch die Bedeutung „falsch", z.B.
   ,,Konstantinopel ist die kleinste Stadt in Afrika"
f) Wahre Aussagen.

Typen von Aussagen

Man unterscheidet i.a. vier Typen von Aussagen:

1) **Singuläraussagen** (Einzelaussagen), z.B.
   ,,Napoleon ist der Verlierer von Waterloo" oder
   ,,3 + 2 = 5“

2) **Existentialaussagen**, die durch die sprachliche Formel ,,Es gibt" oder ,,Es existiert (ein Ding derart, dass...)" eingeleitet werden können, z.B.

„Es gibt einen Menschen, der Präsident der USA ist" oder
„Es existiert eine Zahl b so dass a + b = 0 ist" oder
„Zu jeder natürlichen Zahl x existiert eine Zahl y derart, dass y< x gilt"

3) **Universalaussagen**, die durch die sprachliche Formel „Für alle" oder „Für alle x gilt" eingeleitet werden können, z.B.
„Für alle Menschen gilt, dass sie sterblich sind" oder
„Für alle reellen Zahlen gilt: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ “

4) **Partikularaussagen**, die durch die sprachliche Formel „Für einige x gilt" eingeleitet werden können, z.B.
„Für einige lebende Katholiken gilt, dass sie Papst sind" oder
„Einige Schwäne sind weiß"

Man kann Aussagen überdies danach unterscheiden, ob sie positiv (bejahend) oder negativ (verneinend) formuliert sind.

Man beachte hierzu vor allem: Universalaussagen („Für alle...“) müssen wirklich ohne Ausnahme für sämtliche Einzelfälle gelten. Empirische Universalaussagen sind deswegen in der Regel niemals endgültig verifizierbar, weil die Menge der möglichen Einzelfälle zumeist unendlich ist.
Die Partikel „Es gibt ein x derart dass...“ ist stets im Sinne von „Es gibt mindestens ein x derart dass..." zu verstehen (also nicht im Sinne von „genau ein x").
Die Partikel „einige" hat in der Logik stets die Bedeutung: mindestens eines, möglicherweise aber auch alle. Daher sind die beiden letzten Beispiele wahre Aussagen. „Einige" bedeutet also nicht, wie in der Umgangssprache, soviel wie „etliche", „ein paar" oder dgl.

Universalaussagen symbolisiert man durch das Zeichen **∀x** (den sog. *Generalisator*): „Für alle x gilt ... “
Existentialaussagen symbolisiert man durch das Zeichen **∃x** , zu lesen: „Es existiert ein x derart dass...“
Partikularaussagen symbolisiert man durch das Zeichen ɋx (den Partikularisator), zu lesen: „Für einige x gilt..." (Dieses Zeichen wird selten verwendet, weil man mit den beiden erstgenannten auskommen kann).
Durch das Zeichen ⊥ wird auf die Allgemeingültigkeit von logischen Wahrheiten (s.u.) hingewiesen; zu lesen „Es gilt..." oder „Es gilt stets..."

Aussageformen

Eine Aussageform ist nicht das gleiche wie eine Aussage. Eine Aussageform ist gleichsam nur ein Satzgerüst oder ein Zeichenschema, das erst durch eine bestimmte Deutung zunächst noch unbestimmter Teile, quasi durch das Ausfüllen zunächst leer gelassener ‚Zwischenräume“ zu einer Aussage wird.
Dazu ist nun von Bedeutung, dass man in einer sprachlichen Verlautbarung vom Typus einer Aussage (im zuvor erläuterten Sinne) bestimmte Bestandteile unterscheiden kann, und zwar

1) Sog. **Quantoren** (zuweilen auch Operatoren genannt): das sind jene sprachlichen Formen oder Formeln, an denen man erkennen kann, ob die Aussage eine Singulär-, eine Existenz-, eine Partikular- oder eine Universalaussage sein soll. (Die Symbole dafür wurden soeben gezeigt).

2) **Junktoren** : logische Partikel, von denen die wichtigsten wie folgt symbolisiert werden:

$\neg$	nicht
$\wedge$	und
$\vee$	oder (im nichtausschließenden Sinne von und/oder)
$\div$	oder (im ausschließenden Sinne von entweder/oder)
$\Rightarrow$	wenn - dann (Implikation)

⇔ genau dann - wenn (Äquivalenz)
--> also (im Sinne einer Zuordnung)

3) **<u>Variablen</u>**: Das sind die zuvor erwähnten Leerstellen oder ‚Zwischenräume', die in einer Aussageform noch auszufüllen sind. Genauer spricht man - bei sprachlichen Aussagesätzen - von <u>Subjektsvariablen</u>. Was gemeint ist, wird an folgendem Beispiel deutlich:

Gestern ging Herr Schmitt spazieren.

Wir können diese Aussage auf die ‚Formel' oder das Schema bringen:

Gestern ging ... spazieren.

An die Stelle dieses ‚Lochs' pflegt man nun ein Zeichen zu setzen, z.B. das Zeichen A oder x, womit angezeigt wird, dass dieses Zeichen als ‚Stellvertreter' für bestimmte andere Zeichen, Symbole, Worte oder Ausdrücke eintritt, also zunächst unbestimmt bleibt. Allerdings muss dazu angegeben werden, w e 1 c h e Zeichen - mathematisch sagt man auch: Qbjekte - anstelle von A oder x eingesetzt werden dürfen.
Man nennt dabei A (bzw. x) eine <u>Variable</u> und die Menge aller Zeichen oder Gegenstände, die anstelle der Variablen eingesetzt werden dürfen, die <u>Grundmenge</u> dieser Variablen. Es ist erlaubt, dass diese Menge überhaupt keinen Gegenstand enthält, der eingesetzt werden darf: dann heißt die Grundmenge eine leere Menge.

Für das zuvor genannte Beispiel muss die Grundmenge für A nicht bloß Herrn Schmitt umfassen. Sie muss auch keineswegs die Menge aller Personen darstellen, die tatsächlich gestern spazieren gegangen sind. Vielmehr könnten wir als Grundmenge z.B. die Menge aller Lebewesen festlegen.
Dann sind folgende Fälle denkbar:

(a) *Gestern ging der Walfisch des Londoner Zoos spazieren.*

Dadurch erhalten wir jedoch eine Aussage, die sinnlos ist (weil ein Walfisch gar nicht spazieren gehen kann). Hätten wir gar als Grundmenge alle beliebigen Dinge zugelassen, so wären Aussagen wie z.B. „*Gestern ging die Zahl 5 spazieren*" oder „*Gestern ging der Universitätseingang spazieren*" natürlich ebenso sinnlos.
Die Grundmenge soll also so definiert sein, dass jedes ihrer Elemente, eingesetzt in die Aussageform, eine Aussage ergibt, die wahr oder falsch, aber nicht sinnlos ist.

(b) *Gestern ging Napoleon spazieren.*

Diese Aussage ist sinnvoll, aber sie ist falsch. (Denn Napoleon war gestern gar nicht mehr am Leben, konnte also auch nicht spazieren gehen).

(c) *Gestern ging Peter Vogel spazieren.*

Ob diese Aussage wahr ist, hängt davon ab, ob irgendein bestimmter lebender Peter Vogel gestern tatsächlich spazieren ging.

Man beachte indessen, dass Beispiele dieser Art, die bei Logikern sehr beliebt sind, durchaus ihre Tücken haben können. Hätten wir die Aussage (b) etwa im Tagebuch eines Soldaten der französischen Armee aus dem Jahre 1806 gefunden, so hätten wir sie keineswegs sofort als falsch beurteilt. Daran lässt sich erkennen, dass die

Adverbialbestimmung „gestern" semantisch unter-bestimmt, ihre Bedeutung also nicht eindeutig ist. (Was heißt „gestern" bezogen auf einen Ort jenseits der Datumsgrenze ?).
Auch eine Aussage wie z.B. „*Heute scheint die Sonne*" erweckt nur oberflächlich den Anschein, als ließe sie sich ganz einfach nach „wahr" oder „falsch" entscheiden: Man sehe halt aus dem Fenster und prüfe, ob's stimmt. Jedoch könnten Beobachter, die nur wenige Kilometer von einander entfernt sind, zu ganz entgegengesetzten Urteilen gelangen. Streng genommen, ist die Aussage ohne die genaue Angabe der geographischen Ortskoordinaten nicht eindeutig entscheidbar. Abgesehen davon, dass überdies die Bestimmung „heute" ebenso mehrdeutig ist wie die Bestimmung „gestern" (und dass „heute" z.B. auch die Stunde vor Mitternacht umfasst, in der, zumindest in Mitteleuropa, die Sonne überhaupt nie scheint), bleibt schließlich auch unklar, wie das Wort „scheinen" semantisch zu interpretieren ist. Versteht man darunter die Emission elektromagnetischer Strahlung von der Sonne, so „scheint" die Sonne i m m e r, solange sie existiert. Wenn „scheinen" bedeuten soll, dass es taghell draußen ist (und nicht Nacht), dann scheint die Sonne an jedem Tag. Soll „scheinen" indessen bedeuten, dass die Sonnenstrahlen die Wolkendecke durchdringen, so können sich oft Beobachter am gleichen Ort nicht einigen, ob „heute" tatsächlich „Sonnenschein" herrscht oder nur für kurze Momente oder ob es dazu nicht überhaupt zu „diesig" sei.
Logiker beharren darauf, es sei völlig ausgeschlossen, dass eine Aussage (über die Welt) g l e i c h z e i t i g wahr u n d falsch sein könne. Dialektiker betonen hingegen, dass es sehr wohl möglich sei, dass eine Aussage i n e i n e r H i n s i c h t wahr und in anderer Hinsicht (oder in einem anderen Sinne) falsch sein könne. Man prüfe das etwa am Beispiel der Aussage „*Peter und Gerda haben heute den selben Film gesehen*." Die Aussage mag wahr sein in dem Sinne, dass tatsächlich Peter und Gerda heute im selben Kino waren. Sobald sie sich jedoch über den Film unterhalten, stellen sie fest, dass jeder einen ganz anderen gesehen hat. In d i e s e r Hinsicht also ist die selbe Aussage falsch. Besonders deutlich wird das am Beispiel von Aussagen, die auf die Zeit oder auf eine zeitliche Entwicklung Bezug nehmen. Man prüfe das an der Aussage „*Ich bin mit mir identisch*".
Und wie verhält es sich mit Aussagen, die sich auf die Zukunft beziehen? Z.B. „*Der Bundeskanzler wird morgen nach Berlin fahren*." Dieser Satz erfüllt alle Voraussetzungen, die an eine Aussage im Sinne der Aussagenlogik gestellt werden. Aber ist er - jetzt? - entscheidbar ? Besteht nicht vielmehr (jetzt) nur eine gewisse W a h r s c h e i n 1 i c h k e i t dafür, dass er wahr ist ? Und beinhaltet der Begriff der Wahrscheinlichkeit überhaupt etwas anderes als den „Wahrheitswert" von Aussagen, die sich auf zukünftige Ereignisse beziehen ?

Durch die Einsetzung von Elementen einer Grundmenge an die Stelle der Variablen in einer Aussageform kann man also sinnlose und sinnvolle Aussagen erhalten.
Die Menge aller derjenigen Elemente der Grundmenge, für die man sinnvolle Aussagen erhält, heißt der <u>Variabilitätsbereich</u> der Variablen.
Im Falle des zuvor genannten Beispiels wäre der Variabilitätsbereich von A die Menge aller lebenden Wesen, die laufen können.
Die Einsetzung eines Elements aus dem Variabilitätsbereich an die Stelle von A liefert jetzt zwar sinnvolle, aber nicht notwenig auch w a h r e Aussagen. In der Aussage „*Gestern ging der Bundeskanzler spazieren*" ist zwar ein Element des Variabilitätsbereichs eingesetzt: die Aussage ist sinnvoll, aber sie ist nicht unbedingt wahr, denn vielleicht ging der Bundeskanzler gestern gar nicht spazieren. Wenn die Aussage aber nicht wahr ist, dann kann sie, aus Gründen des Zweiwertigkeits-Axioms, nur falsch sein.
Die Bestimmung des Variabilitätsbereichs nennt man eine <u>Interpretation</u> der Variablen. Die Einsetzung eines bestimmten Gegenstandes (d.h. eines Elements aus dem Variabilitätsbereich) an die Stelle der Variablen nennt man eine <u>Belegung</u> der Variablen.
Diejenigen Belegungen, für die eine Aussageform in wahre Aussagen übergeht, nennt man <u>Erfüllungen</u> der Aussageform. Die Menge aller dieser Erfüllungen nennt man die <u>Erfüllungsmenge</u> (bzw. bei mathematischen Aussageformen die <u>Lösungsmenge)</u>. Sie ist eine Teilmenge des Variabilitätsbereichs.
Eine Aussageform heißt <u>logisch wahr</u>, wenn jede beliebige Grundmenge gleich der Erfüllungsmenge ist. Sie heißt <u>erfüllbar</u>, wenn ihre Erfüllungsmenge wenigstens e i n Element enthält, und sie heißt unerfüllbar, wenn ihre Erfüllungs- bzw. Lösungsmenge die Nullmenge (=leere Menge) ist.
Wie leicht zu sehen ist (und dies ist von wesentlicher Bedeutung), kann eine Aussage f o r m (im empirischen Sinne) weder wahr noch falsch sein, sondern nur erfüllbar oder unerfüllbar!

Aussage f o r m e n (also das, was hier als Schema oder Schablone bezeichnet wurde) werden durch die Angabe von zwei Bedingungen in A u s s a g e n überführt:
1) durch die Angabe eines Quantors (z.B. „Für alle A gilt ...),
2) durch die Belegung der Variablen mit Elementen des jeweiligen Variabilitätsbereichs.
Denn selbstverständlich kann eine Aussageform auch mehr als e i n e Variable enthalten (Wie z.B. : *„Alle A haben große B*").

4) Neben den Quantoren, Junktoren und Variablen können in einer Aussageform auch noch sog. **<u>Prädikate</u>** vorkommen. Mathematiker sagen, Prädikat sei jede <u>Relation</u> auf der jeweiligen Grundmenge, also jede Art von Eigenschaft oder Beziehung, die ich über Elemente der betrachteten Grundmenge aussagen kann. Im vorigen Beispiel ist

„.... ging (gestern) spazieren"

Prädikat zu der Subjektsvariable A. Natürlich kann man über dieselbe Grundmenge auch noch andere Prädikate aussagen oder zwischen den Elementen dieser Grundmenge (z.B. der der lebenden Wesen) andere Arten von Beziehungen herstellen, z.B.

A ist befreundet mit B	*(**A, B:** lebende Menschen)*
X verdient den Unterhalt für Y	*(**X, Y:** lebende Menschen)*
U ist der Sieger von V	*(**U:** Menschen; **V:** hist. Schlachten)*

In mathematischen Aussagen und Aussageformen stellen z.B. folgende Symbole Prädikate dar:

$=$ (Gleichheit)
$\equiv$ (Identität)
$\leftrightarrow$ (Äquivalenz)
$\approx$ (Kongruenz oder annähernde Gleichheit)
$\neq$ (Ungleichheit)
$<$ (kleiner als)
$\geq$ (grösser oder gleich)

Unter bestimmten Umständen heißen solche Relationsprädikate in mathematischen Aussagen auch <u>Funktoren</u>. (Ihre Schreibweise ist nicht überall einheitlich).

Ganz allgemein schreibt man anstelle solcher Zeichen oder auch entsprechender sprachlicher Beziehungen das Zeichen **R** (für: ‚Relation'), sodass Aussagen dieses Typs allgemein die Fassung

x **R** y oder a **R** b oder
s **R** p (s: Subjekt, p: Prädikat)

haben. Dabei kann an die Stelle einer der Variablen (z.B. y) auch eine Konstante treten (z.B. x **R** 3 für $x < 3$; Variabilitätsbereich: natürliche Zahlen; Erfüllungsmenge: $\{1, 2\}$)
In einer Aussageform wie z.B.

„x <u>ist kleiner als 3</u>"

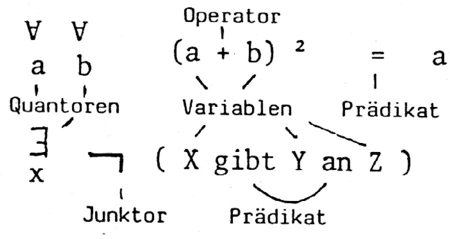
oder *„X <u>besuchte gestern den Oberbürgermeister von München</u>*"

wird alles, was unterstrichen ist, zum Prädikat.

5) In mathematischen Aussageformen und Aussagen treten schließlich noch sog. **Operatoren** auf: das sind Zeichen für bestimmte Operationen oder Veränderungen, die man mit den gegebenen Variablen oder Prädikaten vornehmen soll.
Viele dieser Operatoren sind allgemein bekannt, z. B.

$+, - , \log, \sqrt{\ } , \ldots^2 , \cos, \cap, \cup$ usw.

Einige Beispiele für Aussageformen in der nunmehr eingeführten symbolischen Schreibweise:



$\perp A \vee A \Rightarrow A$ (Es gilt stets: Wenn A oder A, dann A. Der Variabilitätsbereich für A sind hier selber Aussagen! Beispiel: Wenn es schneit oder schneit, dann schneit es. Die Aussageform wird für j e d e Belegung stets wahr! Daher das Zeichen $\perp$)

$$\underset{x_i \in B}{\exists} \quad \underset{x_j \in B}{\exists} \quad \mathbf{(x_i,\ x_j)\ R\ (y \in X)}$$

(Dies ist etwa zu lesen : Es gibt zwei B-Dinge, x genannt, derart, dass zu diesen stets ein C-Ding in der Beziehung **R** steht; zum Beispiel: Zu zwei Punkten x_1 und x_2 gibt es stets eine Gerade y derart, dass x_1 und x_2 auf y liegen. Oder: Zu zwei Stühlen x_1 und x_2 existiert ein Tisch y derart, dass die Stühle neben dem Tisch stehen.)

Aussageverknüpfungen und Aussagefunktionen

Von besonderer Bedeutung sind bestimmte Verknüpfungen von Aussagen durch Junktoren wie z.B. ,,und", ,,oder", ,,wenn - dann", ,,genau dann, wenn", ,,entweder - oder" usw. In allen diesen Fällen seien im Folgenden die Variablen s e 1 b e r A u s s a g e n (auch Satzvariablen genannt) oder - wenn es sich um mathematische Aussagen handelt - sog. Terme. Ein Term kann eine Zahl, eine Variable oder auch ein zusammengesetzter Zeichenkomplex sein wie z.B.

$a,\ 2,\ s,\ x^2, (a+b),\ z^3, \sin (q/p)$ oder dergleichen.

Es gibt nun eine Reihe von solchen Aussageverknüpfungen, die s t e t s w a h r sind, und zwar ohne Rücksicht auf ihren Inhalt und ohne Rücksicht auf die Art der Belegung der Variablen. Dies soll zunächst an einigen Beispielen demonstriert und dann etwas genauer präzisiert werden.

1.Beispiel: $q_x (x = y) \Rightarrow q_x (y = x)$

Gelesen: Wenn für einige x gilt, dass sie (gleich) y sind, so gilt für einige y, dass sie (gleich) x sind.
Offenbar ist diese durch den Junktor „wenn - dann" verknüpfte Aussageform i m m e r wahr, ganz gleich wodurch die Variablen x und y belegt werden. Etwa: W e n n es - im e m p i r i s c h e n Sinne - wahr ist, dass einige Katzen Zitronen sind, d a n n ist - aus l o g i s c h e n Gründen - auch wahr, dass einige Zitronen Katzen sind. Die gesamte Verknüpfung (die selber wieder eine Aussageform darstellt) besitzt schlicht die Eigenschaft, dass sie für jede Belegung die Wahrheit der ersten Teilaussage („*Einige x sind y*"; z.B. „*Einige Katzen sind Zitronen*") auf eine andere Aussage, nämlich die zweite Teilaussage ü b e r - t r ä g t. Allerdings wird dabei unterstellt, d a s s die erste Teilaussage, die sog. Prämisse, wahr i s t. Trifft das faktisch gar nicht zu, so kann natürlich die Wahrheit der zweiten Teilaussage daraus auch nicht gefolgert werden. Die gesamte (verknüpfte) Aussageform aber ist, unabhängig von der Belegung der Variablen (d.h. unabhängig vom jeweiligen Inhalt i), s t e t s wahr, also l o g i s c h wahr, weil das konditionale „wenn" des Junktors bereits die Bedingung setzt, d a s s die erste Teilaussage (für irgendeine Belegung) wahr sei.
(Der entscheidende Unterschied zwischen faktischer und logischer Wahrheit wird im Zusammenhang mit der Syllogistik noch eingehender erörtert.)

2.Beispiel: „*Adenauer ist tot."*

Diese Aussage ist faktisch wahr. Setzt man nun anstelle der g a n z e n Aussage das Symbol A, so steht diese Variable A jetzt für a l l e Aussagen, die den Wahrheitswert „wahr" haben.
Dann bedeutet ¬A (im Beispiel: Nicht „*Adenauer ist tot*" - oder einfacher: „*Adenauer ist nicht tot."*) die logische Verneinung oder <u>Negation</u> aller dieser Aussagen A (gelesen: non-A oder nicht-A). Mit Hilfe des Zeichens ∨ („oder") als Junktor lässt sich nun die Aussage f o r m bilden

$$A \vee \neg A$$

Es stellt sich heraus, dass auch diese Aussageform für jede beliebige Belegung (mit Aussagen) s t e t s wahre Aussagen liefert. (Genau gesagt, handelt es sich hier um eines der Axiome oder Prinzipien der Aussagenlogik, nämlich das **pricipium contradictionis**, auf das zuvor bereits hingewiesen wurde).

Auch diese Aussageform kann man zum logischen Schließen, d.h. zur Übertragung der Wahrheit (oder Falschheit) der ersten Aussage auf die zweite verwenden. Wenn nämlich A wahr ist, so muss (diesmal) ¬A f a l s c h sein, und wenn A falsch ist, so muss ¬A wahr sein.
Diesen Sachverhalt, der sich einfach aus dem Zweiwertigkeits-Postulat ergibt, pflegt man in Gestalt einer sog. Wahrheitstafel darzustellen:

A	**¬A**
w	**f**
f	**w**

3. Beispiel: Hier werden z w e i Aussagenvariablen betrachtet, die vermittels eines Junktors zu einer d r i t t e n Aussage (oder Aussageform) verknüpft werden. Verknüpft man z.B. die Aussagenvariablen A und B durch den Junktor ∨ (vel = „oder"), so erhält man die folgende Wahrheitstafel für die Verknüpfung A ∨ B:

A	**B**	**A ∨ B**
w	**w**	**w**
w	**f**	**w**
f	**w**	**w**
f	**f**	**f**

Man erinnere sich, dass der Junktor „ $\vee$ " das sog. nicht-exclusive „oder" bezeichnet: er bedeutet also, dass von den beiden Aussagen (oder Belegungen) A und B m i n d e s t e n s eine wahr sein muss, evtl. aber auch b e i d e wahr sein können, damit $A \vee B$ wahr ist.

Gewiss können wir auch hier die Wahrheitstafel verwenden, um von den Wahrheitswerten der Aussagen A und B auf den Wahrheitswert der Verknüpfung $A \vee B$ zu schließen. Man muss jedoch strikt beachten, dass die Aussageform $A \vee B$ keineswegs i m m e r wahr ist, sondern dass ihre Wahrheit hier vielmehr von der Wahrheit (oder Falschheit) der Einzelaussagen A und B abhängt. $(A \vee B)$ ist nämlich falsch, wenn A und B beide falsch sind.

4. Beispiel: Mit Hilfe der Wahrheitstafeln können wir allerdings nach Verknüpfungen suchen, die s t e t s wahr (also logisch wahr) sind, und zwar ganz gleichgültig, ob die verknüpften Teilaussagen (bzw. die entspr. Belegungen) wahr sind oder nicht. Die Wahrheitstafel dient als Entscheidungsmethode zur Feststellung solcher Aussageformen, die für a l l e Belegungen (ihrer Variablen mit Aussagen) stets wahre Aussagen ergeben müssen. Aussageformen d i e s e r Art nennt man logische Wahrheiten; man bezeichnet sie auch als aussagenlogische Gesetze (Theoreme) oder als Tautologien. Man prüfe, ob z.B. die folgende Verknüpfung ein solches logisch wahres Gesetz ist:

$$(A \wedge B) \vee (\neg A \vee \neg B)$$

Die gültigen Schlußmuster der klassischen Syllogistik sind solche logischen Gesetze, die die Wahrheit der beiden Prämissen (f a l l s diese faktisch besteht !) mit Notwendigkeit auf die Conclusio überträgt (jedoch nie umgekehrt von der Conclusio auf die Prämissen !). Entsprechende logisch wahre Aussageformen aus der Algebra wären z. B.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$a (b + c) = ab + ac$$
$$a^p : b^p = (a/b)^p$$

usw.

Nochmals: Jede Aussagenverknüpfung, die u n a b h ä n g i g von der Wahrheit oder Falschheit der verknüpften Aussagen (Variablen) s t e t s wahr ist, ist ein aussagenlogisches Gesetz. Eine Aussagenverknüpfung, die unabhängig von den Wahrheitswerten der jeweils verknüpften Aussagen stets f a l s c h ist, nennt man eine Kontradiktion. Ein Beispiel dafür wäre etwa die Verknüpfung $A \wedge \neg A$.
Man beachte indessen, dass keineswegs jede Aussagenverknüpfung, die keine Tautologie (d.h. kein allgemeingültiges aussagenlogisches Gesetz) ist, eine Kontradiktion sein muss. Das Beispiel (3) zeigt die vier möglichen Kombinationen der Wahrheitswerte für die Aussagen A und B. Wenn bei wenigstens einer solchen Kombination die Verknüpfung wahr und bei wenigstens einer die Verknüpfung falsch wird, spricht man von einer sog. Neutralität. Beispiel (3) ist eine solche.

Bestimmte logische Verknüpfungen von n Aussagen(variablen) zu neuen Aussagen nennt man auch n-stellige Aussagenfunktionen, wenn jedem n-Tupel von Aussagen(variablen) e i n d e u t i g eine neue Aussage (oder Aussageform) zugeordnet wird. Aussagefunktionen sind daher - wie auch mathematische Funktionen - eindeutige Abbildungen. Die Junktoren, durch welche die Verknüpfung gebildet wird, heißen hier auch Funktoren; sie werden beispielsweise so symbolisiert:

et (A,B) - für die sog. Konjunktion zweier Aussagenvariablen A und B
vel (p,q) - für die nichtexclusive Alternative der Aussagen p und q
seq (x,y) - für die Implikation der Aussagen x und y
äq (M,N) - für die Aquivalenz der Aussagen M und N

Die folgende Tafel gibt eine Übersicht über einige der wichtigsten Aussagefunktionen:

Aussagefunktion		Darstellung			Formulierung in natürlicher Sprache
		operativ	*symbolisch*	*Funktor*	
einstellig	**Negation**	nicht p	$\neg p$	non (p)	es ist nicht wahr, dass...
zweistellig	**Konjunktion**	p und q	$p \wedge q$	et (p,q)	sowohl p als auch q
	Disjunktion	p und / oder q	$p \vee q$	vel (p,q)	mindestens eins von beiden
	Implikation	wenn p, so q	$p \Rightarrow q$	seq (p,q)	wenn p, dann q
	Replikation	nur wenn q, so p	$p \Leftarrow q$	rep (q,p)	p genau dann wenn q
	Äquivalenz	p genau dann, wenn q	$p \Leftrightarrow q$	äq (p,q)	beides oder keines
	Antivalenz	entweder p oder q	$p \Leftarrow/\Rightarrow q$	aut (p,q)	genau eins von beiden
dreistellig	(als Beispiel)		$p \vee q \vee r$		

Zu der vorstehenden Tafel, in der die Aussagenvariablen (wie in vielen Lehrbüchern üblich) mit p und q (statt mit A und B) bezeichnet wurden, noch einige Erläuterungen:
Man beachte den Unterschied zwischen dem ausschließenden ,,entweder-oder" (lat. aut), der sog. Antivalenz, und dem nicht ausschließenden „oder“ (lat. vel), der sogenannten Disjunktion oder Alternative. Die Antivalenz ist genau dann wahr, wenn g e n a u e i n e der beiden Aussagen wahr ist; sie ist falsch, wenn p und q beide wahr sind (!!) oder wenn beide falsch sind. Die Disjunktion (p v q) ist dagegen genau dann falsch, wenn p und q b e i d e falsch sind - und in allen anderen Fällen wahr!
Die Implikation ($p \Rightarrow q$) ist dann und n u r dann falsch, wenn p (die Prämisse) w a h r und q (die Conclusion) f a l s c h ist. In allen anderen Fällen, also auch dann, wenn p und q b e i d e falsch sind (!!), ist die Implikation (d.h. die gesamte Verknüpfung) w a h r ! Dies wurde oben bereits an einem Beispiel demonstriert.
Die Replikation ist die Umkehrung der Implikation. Sie wird deswegen auch Gegenimplikation genannt. Also könnte ($p \Leftarrow q$) immer auch als ($q \Rightarrow p$) geschrieben werden. Mit der erstgenannten Schreibweise wird jedoch angezeigt, dass hier (d.h. bei der Replikation) p eine n o t w e n d i g e Bedingung für q darstellt (N u r wenn p, dann q ! D.h. wenn immer p falsch ist m u s s auch q falsch sein !), während p bei der Implikation lediglich eine h i n r e i c h e n d e Bedingung für q darstellt. - Die Replikation ist genau dann falsch, wenn p falsch und q wahr ist; in allen anderen Fällen ist sie w a h r !
Es wird dringend empfohlen, sich diese Zusammenhänge anhand der Wahrheitstafeln für beide Verknüpfungen (s.u.) zu verdeutlichen und dabei die folgenden Beispiele zuhilfe zu nehmen:

<u>Beisp. 1:</u> (p1) Die Zahl x ist geradzahlig
(q1) x ist durch 2 teilbar

<u>Beisp. 2:</u> (p2) x ist ungeradzahlig
(q2) x ist eine Primzahl

Anfängern bereitet es z.B. oft Schwierigkeiten, zu verstehen, wieso ($p \Rightarrow q$) auch dann w a h r ist, wenn p falsch und q wahr ist. Man kann dies leichter begreifen, wenn man sich klarmacht, dass die Implikation ($p \Rightarrow q$) nichts anderes ausdrückt als die Aussageform ($\neg p \vee q$). Mit anderen Worten:

($p \Rightarrow q$) und ($\neg p \vee q$) sind logisch äquivalent,

denn beide Ausdrücke haben, wie man sich überzeugen kann, die gleiche Wahrheitstafel. (Auch die Formel $\neg(p \wedge \neg q)$ hat die gleiche). - Die Replikation ($p \Leftarrow q$) ist auch dann wahr, wenn p wahr ist und q falsch. Lässt sich ein entsprechender Ausdruck finden, der der Replikation logisch äquivalent ist ? Bei Betrachtung der Wahrheitstafel für die Implikation stellt man fest: Es gibt nur eine einzige Möglichkeit, wo sowohl p als auch ($p \Rightarrow q$) wahr sind, nämlich den Fall, wo auch q wahr ist. Infolgedessen kann man aus der Wahrheit von p u n d ($p \Rightarrow q$) auf die Wahrheit von q s c h l i e ß e n ! Dieser Schlussmodus wird seit der Scholastik als der sog. <u>modus ponens</u> bezeichnet. Wie lautet der entsprechende Fall bei der Replikation und welcher Art ist der zugehörige Schlussmodus (der sog. modus tollens)? Können p und q durch Implikation u n d Gegenimplikation verknüpft werden, so sind p und q äquivalent; geschrieben: $p \Leftrightarrow q$. Man muss jedoch betonen, dass diese Äquivalenz im rein l o g i - s c h e n Sinne besteht und lediglich besagt, dass p und q genau den s e l b e n Wahrheitswert besitzen! In der Aussagenlogik wird also allein die sog. e x t e n s i o n a l e Äquivalenz (i.e. die Identität der Wahrheitswerte) betrachtet, während die i n t e n- s i o n a l e Äquivalenz von Aussagen (bzw. ihrer Prädikate) mit logischen Mitteln allein zumeist nicht geprüft werden kann. So sind z.B. die Aussagen ,,*Dieses Glas ist halb voll*" und ,,*Dieses Glas ist zur Hälfte leer*" sicherlich äquivalent, aber um dies zu prüfen, bedarf es s e m a n t i s c h e r Analysen des S i n n e s von Wörtern wie ,,voll" und ,,leer". (Man überprüfe, ob diese beiden Wörter z.B. im gleichen Verhältnis zueinander stehen wie etwa die Wörter „feige" und ,,mutig"!) In anderen Fällen kann die (intensionale) Äquivalenz von Aussagen nur durch pragmatische (oder empirische) Untersuchungen überprüft werden, z.B. für ,,*Die vorliegende Substanz enthält Arsen*" und ,,*Die vorliegende Substanz ist giftig*" - Sind die beiden Aussagen

(p) *Der Großvater von x ist der Onkel von y*
(q) *X's Mutter ist die Nichte von y*

äquivalent, und wenn ja: im extensionalen oder im intensionalen Sinne ?

In der zweiwertigen Aussagenlogik kann man einen weiteren Abstraktionsschritt vollziehen und anstelle der Aussagen (oder Aussageformen) lediglich deren Wahrheitswerte betrachten. Durch diesen Abstraktionsschritt von den Aussagen selbst zu ihren Wahrheitswerten erhält man aus den extensionalen Aussagefunktionen korrespondierende Wahrheitsfunktionen. Hier ordnet eine n-stellige Wahrheitsfunktion jedem n-Tupel von Wahrheitswerten genau einen (neuen) Wahrheitswert zu. Aus kombinatorischen Gründen errechnet sich die Anzahl der n-stelligen Wahrheitsfunktionen für jede (natürliche) Zahl n stets als 2^{2^n}.

Demnach gibt es genau vier einstellige Wahrheitsfunktionen (wie z.B. non), 16 zweistellige, 64 dreistellige usw. - Mehrstellige Wahrheitsfunktionen können jedoch stets aus ein- und zweistelligen zusammengesetzt werden, sodass diesen letzteren eine besondere Bedeutung zukommt. Die folgende Tabelle zeigt die Wahrheitstafeln für die wichtigsten ein- und zweistelligen Wahrheitsfunktionen:

p	**q**	**¬p**	**¬q**	**p ∧ q**	**p ∨ q**	**p ⇒ q**	**p ⇐ q**	**p ⇔ q**	**p⇐/⇒q**	**¬p∨q**	**p∧¬q**	**¬p∧q**
F	F	W	W	F	F	W	W	W	F	W	F	F
F	W	W	F	F	W	W	F	F	W	W	F	W
W	F	F	W	F	W	F	W	F	W	F	W	F
W	W	F	F	W	W	W	W	W	F	W	F	F
		non p	*non q*	*et*	*vel*	*seq*	*rep*	*äq*	*aut*			

(Die drei Wahrheitstafeln ganz rechts sind natürlich keine zweistelligen Wahrheitsfunktionen; sie wurden hier nur als Hilfen angefügt, um die Zusammenhänge besser zu verdeutlichen).
Warum führt die Tabelle lediglich 6 der zweistelligen Wahrheitsfunktionen an, während es doch nach obiger Berechnung 16 davon geben müsste ?
Das hat einen einfachen Grund. In der zweiwertigen Aussagenlogik heißen zweistellige Wahrheitsfunktionen auch BOOLE 'sche Funktionen. Innerhalb der Theorie der BOOLE'schen Funktionen kann bewiesen werden, dass jede zweistellige (ja sogar jede n-stellige) BOOLE'sche Funktion lediglich mit Hilfe der drei Funktoren non, et und vel darstellbar ist. Überdies kann gezeigt werden, dass

$$et(p,q) = non\ (vel\ (non(p),\ non\ (q)))$$

gilt, sodass man sämtliche zweistelligen BOOLE'schen Funktionen durch Verkettungen der beiden Funktoren non und vel allein darstellen kann.
Es geht sogar noch einfacher. Eine der 16 zweistelligen BOOLE'schen Funktionen ist die sog. PIERCE- oder Nor-Funktion (Funktor: pce); eine andere heißt SHEFFER- oder Nand-Funktion (Funktor: sh). Mit jeder dieser Funktionen a l l e i n lassen sich alle übrigen n-stelligen BOOLE'schen Funktionen ausdrücken, denn es gelten die folgenden Beziehungen:

$$non\ (p) = sh\ (p,p) = pce\ (p,p)$$
$$et\ (p,q) = sh(\ sh\ (p,q),\ sh\ (p,q))$$
$$vel\ (p,q) = pce\ (pce\ (p,q),\ pce\ (p,q))$$

Man stelle sich vor, man könnte bestimmte m a t e r i e l l e Elemente, von denen jedes nur zwei Zustände einnehmen kann (z.B. ein/aus geladen/ungeladen o.ä., allgemein die Zustände 1 und 0), so zusammenschalten, dass für zwei Inputs p und q (deren jeder gleichfalls nur 1 oder 0 betragen kann) als

Output z.B. stets die Wahrheitswerte der vel-Funktion (ebenfalls als 1 oder 0 codiert) herauskämen. Hätte man eine weitere solche Schaltung für die non-Funktion, so ließen sich sämtliche BOOLE 'schen Funktionen und ihre Verkettungen in Gestalt entsprechender Schaltungen materialisieren. Könnte man eine Schaltung bauen, die gemäß der SHEFFER- oder der PIERCE-Funktion arbeitet, so käme man mit jeweils einem einzigen Bauteil aus, um beliebige logische Verknüpfungen materiell darzustellen und ausführen zu lassen. Tatsächlich kann man solche Bauteile wirklich herstellen: es sind die Grundbausteine aller Digital-Computer.
Die Theorie, nach der solche Schaltelemente (z.B. elektrische, elektronische, magnetische, pneumatische oder anders realisierte) arbeiten, bezeichnet man als Schaltalgebra. Es ist leicht zu sehen, dass die Schaltalgebra genau die gleiche logische Struktur besitzt wie die Aussagenlogik. In der Tat sind sowohl die Schaltalgebra als auch die Aussagenlogik nur zwei unterschiedliche Interpretationen eines umfassenden formalen Kalküls, der als sog. BOOLE'scher Verband bezeichnet wird und durch eine abstrakte Axiomatik (die sog. HUNTINGTON'sche Axiomatik) definiert ist. Eine dritte Interpretation dieses selben Verbands ist die Axiomatische Mengentheorie. Dies bedeutet, dass es zu jeder aussagenlogischen Verknüpfung (und natürlich auch zu jeder schaltalgebraischen Funktion) genau eine entsprechende Operation mit Mengen geben muss. Da die formale Mengentheorie heute als die Grundlage der gesamten Mathematik angesehen wird, bedeutet es darüber hinaus, dass es zwischen (aussagen-)logischen und mathematischen Operationen überhaupt keinen strukturellen Unterschied gibt: beide stellen vielmehr nur verschiedene Deutungen ein und derselben abstrakten Struktur (nämlich eines Verbands) dar. Diese universelle Vereinigung von Logik und Mathematik gehört zu den bedeutendsten Leistungen des 20. Jahrhunderts.

Aussagen und Gleichungen

Die Äquivalenz von Logik und Mathematik lässt sich am sinnfälligsten zeigen an der Äquivalenz von Aussagen und Gleichungen. Man wird unschwer erkennen, dass etwa arithmetische Gleichungen tatsächlich nichts anderes als Aussagen (in mathematischer Symbolsprache) sind und algebraische Gleichungen Aussage f o r m e n darstellen. Das, was man gemeinhin als Axiome bezeichnet oder als algebraische Gesetze oder sog. Formeln in Gleichungsform kennt, sind mathematische Aussageformen, die für jede zulässige Belegung ihrer Variablen wahr sind, also nichts anderes als logische Wahrheiten oder logisch wahre Gleichungen, auch Identitäten genannt. Ein Beispiel dafür wäre etwa die binomische Formel. Hier setzt man natürlich anstelle der Variablen nicht Wörter oder Aussagen ein, sondern Zahlen. Für beliebige Belegungen der Variablen einer logischen Identität - wie z.B. der binomischen Formel - erhält man stets Aussagen, die wahr sind:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

für a=2, b=3: $$(2+3)^2 = 4 + 12 + 9 = 25$$

Eine Gleichung wie die letztere, in der keine Variablen vorkommen (und die daher einer Aussage, aber nicht einer Aussageform entspricht) nennt man eine **identische Gleichung**. Jede identische Gleichung ist wahr. Genauer: Eine (arithmetische) Gleichung ist genau dann eine identische Gleichung, wenn sie wahr ist. Setzte man dagegen

$$(2+3)^2 = 4 + 12 + 19,$$

so erhielte man keine identische Gleichung, weil die Aussage f a 1 s c h ist. Hingegen wäre

$$(2+3)^2 \neq 4 + 12 + 19$$

eine wahre Aussage, aber keine identische Gleichung (vielmehr eine Ungleichung). Aussagen von der Art

$$3 = 3 \quad \text{oder} \quad a = a \quad \text{oder} \ {}^2\log 17 = {}^2\log 17 \ \text{oder} \quad a+b = a+b$$

nennt man **reine Identitäten** oder Tautologien.
Betrachtet man eine beliebige identische Gleichung, z.B.

$$3 + 4 = 7,$$

so kann man darin eine Zahl (oder auch einen ganzen Term) auch umgekehrt durch eine Variable ersetzen, z.B. hier die Zahl 4 durch die Variable x:

$$3 + x = 7$$

Eine Gleichung dieser Art nennt man eine **Bestimmungsgleichung**. Eine solche entspricht, wie man sieht, einer Aussage f o r m : sie kann mithin weder wahr noch falsch, sondern nur erfüllbar oder unerfüllbar sein; man sagt hier: lösbar oder unlösbar. Für die Variable x muss ein Variabilitätsbereich definiert sein, etwa die Menge der ganzen Zahlen. Theoretisch könnte man die Menge der ganzen Zahlen nun auf einem Papierstreifen untereinander schreiben und anstelle des Zeichens x in die Gleichung einsetzen. Es ergibt sich, dass diese Aussage für jede Belegung falsch wird, mit Ausnahme der Belegung **„4",** für die sie wahr wird. Die Erfüllungs- oder Lösungsmenge dieser Bestimmungsgleichung ist mithin {4}. (Im Falle von $3 + x^2 = 7$ wäre die Lösungsmenge {+2,-2 }. Man mache sich klar, dass Entsprechendes auch für Ungleichungen gilt; Beispiel: $3 + x < 7$; Lösungsmenge $\Lambda = \{1, 2, 3\}$)
Ersetzt man in einer identischen Gleichung z w e i Terme durch Variable, so erhält man i.a. eine sog. **Funktionsgleichung.** (Bedingung ist dabei, dass mindestens eine der Variablen nur in der 1. Potenz auftreten darf!) Beispiel:

$$3 + x = y$$

Auch dies ist wiederum eine Aussageform. Für gewöhnlich entscheidet man sich, welche der beiden Variablen frei belegt werden soll (man nennt diese dann die unabhängige Variable) und welche durch die dann entstehende Bestimmungsgleichung festgelegt wird (die abhängige Variable). Durch Belegung der abhängigen Variablen in dieser Bestimmungsgleichung mit einem Element des Variabilitätsbereichs, das die Gleichung erfüllt, erhält man eine identische Gleichung. Eine Funktionsgleichung ist daher einem System von Bestimmungsgleichungen äquivalent.
Man könnte sich das wiederum so vorstellen, dass man anstelle von x und y z w e i Papierstreifen mit Zahlen aus den jeweiligen Variabilitätsbereichen durch das Gleichungsschema hindurchzieht. Man erkennt so, dass die Erfüllungs- oder Lösungsmenge einer Funktionsgleichung nicht aus Zahlen, sondern aus Zahlen- oder Wertepaaren besteht. Im allgemeinen ist dies eine unendliche Menge. Bekanntlich nennt man den Variabilitätsbereich der unabhängigen Variablen hier den Definitionsbereich und den der abhängigen den Wertebereich der Funktion. Eine Belegung aus dem Definitionsbereich heißt auch ein Argument. Ferner ist bekannt, dass man die Wertepaare der Lösungsmenge einer Funktionsgleichung häufig in einem Koordinatensystem als Punkte einzutragen und diese zu einer Funktions-Kurve (Graph) zu verbinden pflegt. Natürlich können auch mehr als zwei unabhängige Variable in einer Funktion auftreten: für n Variable besteht die Lösungsmenge dann aus Werte-n-Tupeln, und man sagt, die betr. Gleichung habe n-1 Freiheitsgrade.
Allerdings ist dies an eine strikte Voraussetzung gebunden: Es muss stets eine eindeutige Zuordnung zwischen Werten des Definitionsbereichs jeder unabhängigen Variablen und Werten des Wertebereichs der unabhängigen Variablen gegeben sein.
Dies ist z. B. n i c h t der Fall bei

$$x^2 + y^2 = r^2$$

der sog. Kreisgleichung. Eine solche Gleichung heißt eine **Relationsgleichung** oder ganz allgemein eine **Abbildung.** Funktionen sind stets spezielle, nämlich eindeutige Abbildungen, bei denen jedem Wert der unabhängigen Variablen g e n a u ein Wert der abhängigen zugeordnet sein muß. (Es ist möglich, aber nicht notwendig, dass eine Funktion auch umkehrbar eindeutig oder eineindeutig sein kann, derart dass auch jedem Wert der abhängigen Variablen nur genau ein Wert der unabhängigen korrespondiert). In der folgenden zusammenfassenden Übersicht sind die einzelnen Gleichungstypen jeweils unter die darüber stehenden subsumierbar:

Beispiel	Gleichungstyp	Bemerkungen
$x^2 + y^2 = r^2$	Relationsgleichung (Abbildung)	
$x^2 + y = 7$	Funktionsgleichung $y = f(x)$	erfüllbar oder unerfüllbar
$x^2 + 3 = 7$	Bestimmungsgleichung	lösbar oder nicht
$2^2 + 3 = 7$	Identische Gleichung	wahr
$7 = 7$	Reine Identität	tautologisch
$x^2 + y^2 = y^2 + x^2$	Logische Identität	stets wahr (Kommuationsgesetz)

Sind die folgenden natürlich-sprachlichen Aussagen den vorgenannten Beispielen (in der gegebenen Reihenfolge) entsprechend?

A ist die Schwester von B
A ist der Sieger (der Schlacht) von B
A ist der Sieger von Austerlitz
Napoleon ist der Sieger von Austerlitz (A ist B)
(Napoleon ist der Sieger von Waterloo ??)
Napoleon ist Napoleon (A ist A)
(Napoleon ist Bonaparte ??)
Wenn einige Sieger Idioten sind, sind einige Idioten Sieger

(Bei den etwas eingerückten Fragen soll der logische Status der Aussagen sowie die Frage geklärt werden, welchem Typ von Gleichungen sie entsprechen).
Nur der Vollständigkeit halber sei hier daran erinnert, dass man Bestimmungsgleichungen (oder Systeme von solchen) unterscheidet

1) nach dem Grad derselben,
2) nach ihrer Gattung und
3) nach der Anzahl der Variablen (bzw. Gleichungen in einem System)

Der Grad der Gleichung bestimmt sich nach dem höchsten Exponenten der unabhängigen Variablen. Die Gattung bestimmt sich nach dem Zahlenbereich, zu welchem der Wertebereich der unabhängigen Variablen gehört. (Man unterscheidet z.B. ganz-rationale, gebrochen-rationale, irrationale, transzendente Gleichungen usw.). Lineare Gleichungen sind ganz-rationale Gleichungen 1. Grades. Mit Systemen solcher Gleichungen befasst sich die lineare Algebra (zu der auch das Rechnen mit Matrizen oder Vektoren gehört).